特殊相対性理論から一般相対性理論へ

特殊相対性理論では加速度運動は扱えなかった。しかし現実には加速度運動は存在する。特殊相対性理論を拡張して加速度運動も取り入れたより一般的な「一般相対性理論」、その方程式であるアインシュタインの重力方程式について概要を述べる。

1. ローレンツ変換

ローレンツ変換（「図9、相対性理論から言えること」参照）を行列で書き表すと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 & -v/\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(v/c^2)/\alpha & 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

となる。（$\alpha = \sqrt{1-v^2/c^2}$ ）
この式はx軸方向に速度vで運動している場合についての変換であり、加速度を含めれば，y、z （y‘＝y、z’＝z）も複雑な変換を受けることが予想される。

ニュートンの運動方程式
$F = m1 \cdot a$ （Fは力、m1は物体の慣性質量、aは加速度）
※この式は、力が働けば物体が動きだすことを示す。このm1は動きにくさを表す量。aとは反比例することによる。
万有引力の法則
$F = -G \cdot (M \cdot m2) / R^2$ （Gは万有引力定数、－は引力を表す）
※例えば太陽と地球の関係において、Mを太陽の質量、m2を地球の質量、Rを太陽と地球の距離とすると、Fは太陽と地球の引き合う力。

2. 加速度とは何か

ニュートンの運動方程式によれば、加速度は力によって引き起こされる。
力を重力に限れば、加速度の原因は万有引力になる。

我々が地上を歩ける。空高く浮き上がってしまわないのは、我々の身体を地球との間に働いている重力が引きつけているからである。

逆に地球から遠く離れたロケットが点火して噴射の力で加速を始めたらその加速度によって搭乗員はその慣性力を受けてロケットの床に引き付けられる。それはあたかも地球にいる時と同じ、即ち地球の引力に引き付けられているのと同じ感覚である。加速度だけを捉えれば、搭乗員を床に引き付ける力は地球の引力によるものなのか、ロケットの加速によるものなのか分からない。加速度も相対的なら、地球などの重い天体がなくても、重力は加速によって作ることができる。（次図「等価原理」参照）
その際、万有引力は慣性力に等しいことから、

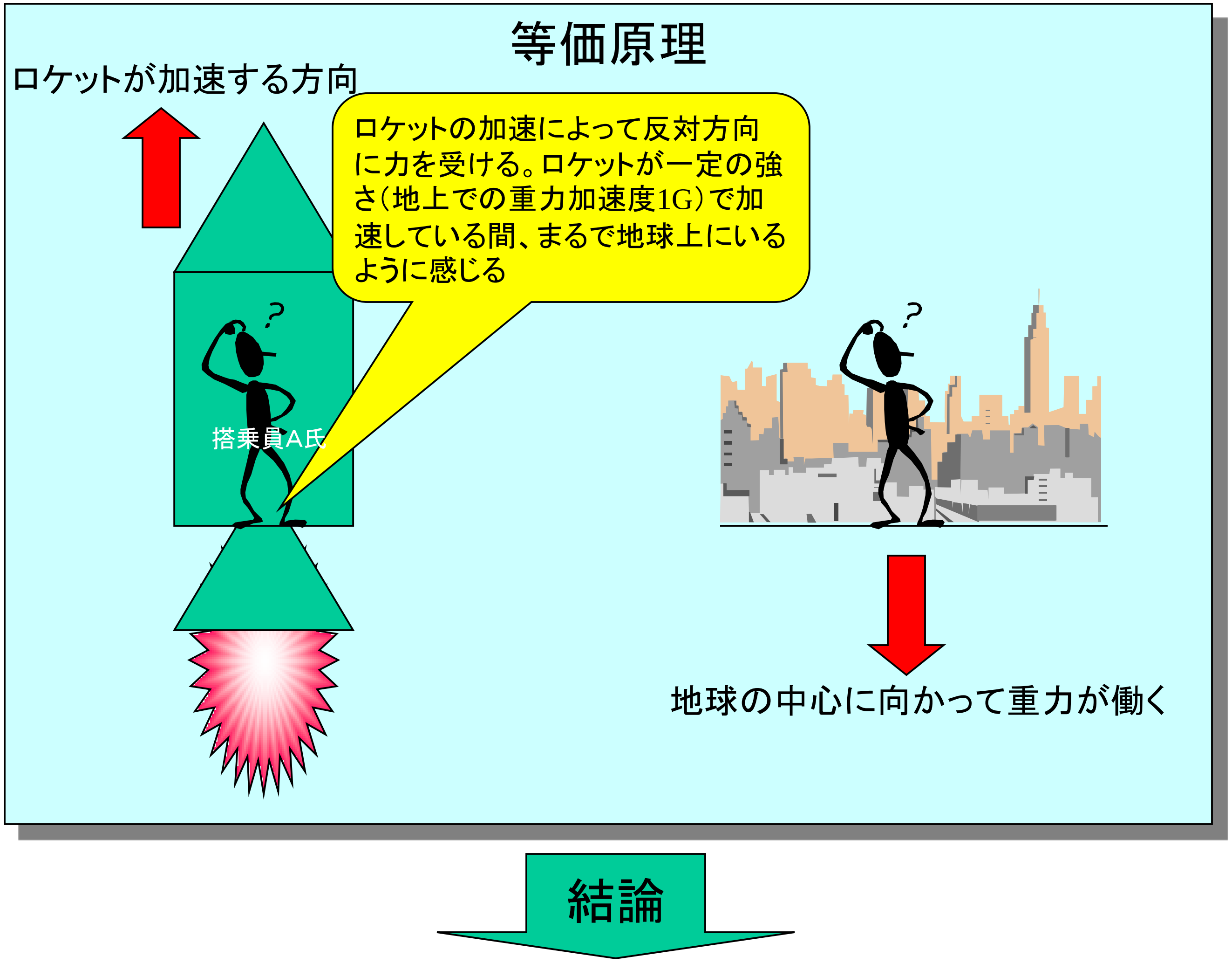
$F = -G \cdot (M \cdot m2)/R^2 = m1 \cdot a$ （今回Mを地球の質量、m2をロケットの搭乗員A氏の重力質量（体重）、Rを地球の半径、m1をA氏の慣性質量とする）

m2はA氏が体重計にのった時の重さ。m1はA氏にある一定の力を加えて動き出した時の加速度を「F＝m1・a」の式に代入して求めた値。（注）

ここでもし、$m1 = m2$ なら、$a = -G \cdot M/R^2$ となり、加速度は質量によらない（A氏の体重によらない）値となる。要するに重力とは地球や太陽などの重い天体が作りだした空間（および時間）の歪み（変化）によって引き起こされるものと言える。

注： $m1 = m2$ は実験により高い精度で正しいことが確かめられている。

一般相対性理論の基本原理



重力(エネルギー)を持った物体の周りの時間と空間が歪む

大きな重力を持つ物体、ブラックホールなどの研究に利用される

スカラー場、ベクトル場、テンソル場

実際にアインシュタインの重力方程式を導くには、複雑な数学的知識を必要とする。ここではあまり厳密に証明するのではなく、関連する数学の概略について簡単に説明する。

空間上の位置にある物理量（スカラー＝大きさのみを持つ量、ベクトル＝大きさと向きを持つ量）を対置させたとき、その空間を場という。

スカラー場の例　温度

部屋の中にストーブがあったとする。その部屋の空間の各位置に温度計をおいて温度を測れば、場所によって温度は異なる。

部屋の温度は位置（x、y、z）の関数T（x、y、z）として表される

温度Tは、大きさのみで向きを持たないスカラー量であるから、空間の各位置においてスカラーが定義できる。この空間を**スカラー場**という。

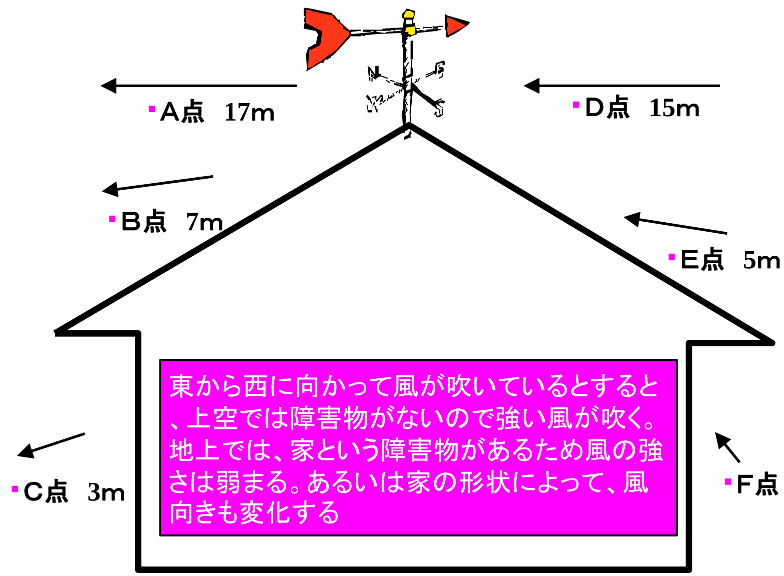
スカラー場の各位置における空間上の変化の割合をx、y、zの各方向に求めたものを**勾配**といい、下記のようにベクトルで表される。

$$(\partial T/\partial x,\ \partial T/\partial y,\ \partial T/\partial z) = \nabla T(x, y, z) = \mathrm{grad}T(x, y, z)$$

▽はナブラ記号。gradはグラディエントの略号

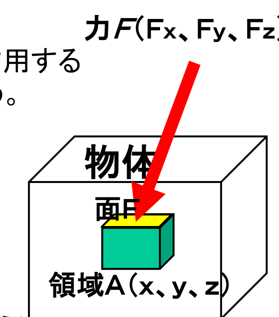
ベクトル場の例　風速

家の周りに風が吹いている。その風速（大きさと向き）は空間の各位置によって変わる。



テンソル場の例　応力

上のベクトルを拡張したものがテンソルである。
例として空間に存在する物体の一つの領域に作用する力がある。この単位面積あたりの力を**応力**と言う。
今微小な領域Aの上部（面F）から力*F* を加えたとする。力*F* の単位面積あたりの力を*T*(n)とすると



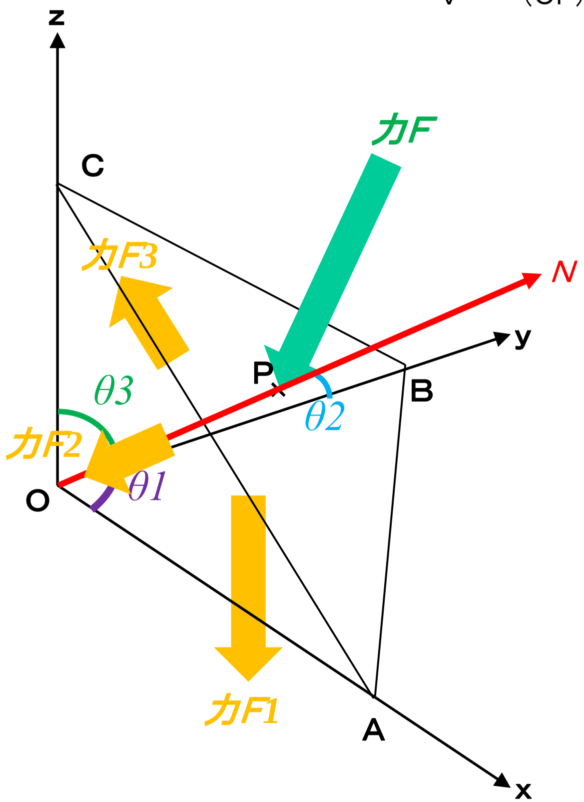
$$F = T(n) \cdot S$$

となる。（Sは、面Fの面積、*n*を法線ベクトルという）

テンソル場（応力）

今x軸y軸z軸（各軸は垂直に交わっている）を定めた空間に下図のような三角錐ABCOを考える。一つの面ABCに垂直で原点Oを通る線N を引く。（この線を法線と呼ぶ）。法線N と面ABCの交わる点をP、面ABCの面積をS、面ABOの面積をS1、面ACOの面積をS2、面BCOの面積をS3とする。その時この三角錐の体積Vは以下となる。（法線N とx軸、y軸、z軸の交わる角度を$\theta 1$ 、$\theta 2$ 、$\theta 3$ 、OP、OA、OB、OCの長さをそれぞれ（OP）、（OA）、（OB）、（OC）とする）

$$V = (OP)\cdot S/3 = (OA)\cdot S3/3 = (OB)\cdot S2/3 = (OC)\cdot S1/3$$
$$= ((OP)/\cos\theta 1)\cdot S3/3 = ((OP)/\cos\theta 2)\cdot S2/3 = ((OP)/\cos\theta 3)\cdot S1/3$$



よって、$S1 = S\cdot\cos\theta 3 \quad S2 = S\cdot\cos\theta 2 \quad S3 = S\cdot\cos\theta 1$ ・・・①

ここで、$\cos\theta 3$、 $\cos\theta 2$、$\cos\theta 1$ は法線N と平行で、OからPの距離を大きさに持つベクトル（これを法線ベクトルと呼ぶ）をxyz座標の単位ベクトル（左下参照）で表した際の各成分を示す。
今、面ABCに力$F(n)$ （$=T(n)\cdot S$）が加えられたとする。（$T(n)$は力Fによる応力の面に垂直な成分）
それを受けて三角錐ABCOが面ABO、ACO、BCOに隣接する領域に対して、それぞれ
力$F1(n)$ （$=T1(n)\cdot S1$）、$F2(n)$ （$=T2(n)\cdot S2$）、$F3(n)$ （$=T3(n)\cdot S3$）の力を及ぼすとする。その結果、作用反作用の法則に基づき、隣りの領域に接する面から逆方向の力を受ける。

今、応力$T1(e1)$、$T2(e2)$、$T3(e3)$を行列$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma 11 & \sigma 12 & \sigma 13 \\ \sigma 21 & \sigma 22 & \sigma 23 \\ \sigma 31 & \sigma 23 & \sigma 33 \end{pmatrix}$ を使って

$T1(e1) = \sigma_{i1}\times e_i$、$T2(e2) = \sigma_{i2}\times e_i$、$T3(e3) = \sigma_{i3}\times e_i$ とおく。
三角錐ABCOが加速度運動をしていないならば、これらの力は釣り合っているから、

$T(n)\cdot S - T1(n)\cdot S1 - T2(n)\cdot S2 - T3(n)\cdot S3 = 0$ （0は成分(0,0,0)のゼロベクトル）

①より、$T(n)\cdot S - T1(n)\cdot S\cdot\cos\theta 3 - T2(n)\cdot S\cdot\cos\theta 2 - T3(n)\cdot S\cdot\cos\theta 1 = 0$

$$T(n) - T1(n)\cdot\cos\theta 3 - T2(n)\cdot\cos\theta 2 - T3(n)\cdot\cos\theta 1 = 0$$
$$T(n) = T1(n)\cdot\cos\theta 3 + T2(n)\cdot\cos\theta 2 + T3(n)\cdot\cos\theta 1$$
$$= \begin{pmatrix} \sigma 11 & \sigma 12 & \sigma 13 \\ \sigma 21 & \sigma 22 & \sigma 23 \\ \sigma 31 & \sigma 23 & \sigma 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta 3 \end{pmatrix} e1 + \begin{pmatrix} \sigma 11 & \sigma 12 & \sigma 13 \\ \sigma 21 & \sigma 22 & \sigma 23 \\ \sigma 31 & \sigma 23 & \sigma 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta 2 \\ 0 \end{pmatrix} e2 + \begin{pmatrix} \sigma 11 & \sigma 12 & \sigma 13 \\ \sigma 21 & \sigma 22 & \sigma 23 \\ \sigma 31 & \sigma 23 & \sigma 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e3$$

ここで、$T(n)$の成分を$T(n)_i$ （i=1,2,3 が x、y、zの各成分に対応）とすると、

$$T(n) = \begin{pmatrix} \sigma 11 & \sigma 12 & \sigma 13 \\ \sigma 21 & \sigma 22 & \sigma 23 \\ \sigma 31 & \sigma 23 & \sigma 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta 1 \\ \cos\theta 2 \\ \cos\theta 3 \end{pmatrix} e_i = (\sigma_{ij}\cdot n_j)\, e_i$$

ここで、σ_{ij}を**応力テンソル**といい、微小領域（ABCO）にかかる力（圧力）を示す。

単位ベクトルとは

xyz座標上の任意のベクトルをAとして、その成分を（a，b，c）としたとき、x軸、y軸、z軸にそれぞれ平行で大きさ“1”のベクトルを$e1$、$e2$、$e3$としたとき、

$A = a\cdot e1 + b\cdot e2 + c\cdot e3$

とかける。この際$e1$、$e2$、$e3$をそれぞれ成分(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)をもつ単位ベクトルという

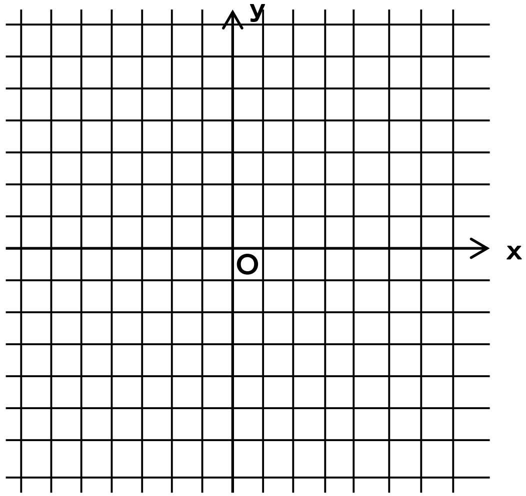
このテンソルは形は行列と同じであるが、それは2階のテンソルを示す。そういう意味で、ベクトルは1階のテンソル。スカラーは0階のテンソルでもある。すなわち、物理量が定義される空間は、**テンソル場**である。
ベクトルは空間の一点における力の3方向の成分。2階のテンソルは極小領域（体積0）の3方向の面に対する力の3つの成分。トータル3×3で9つの成分を持つ。

リーマン幾何学

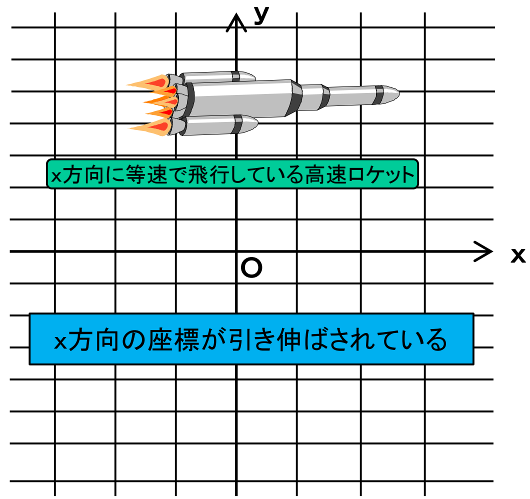
相対性理論では速度や加速度によって時間・空間が歪むことを示している。平坦でどの方向にも一様な、我々が考えている3次元空間とは異なる。そこで座標そのものが伸びたり縮んだりあるいは歪んだりする特殊な空間（これをリーマン空間という）を考える。この特殊な空間を扱う幾何学をリーマン（注）幾何学という。

注：1826～1866　ドイツの数学者。これまでの一般的な幾何学であるユーグリッド幾何学を拡張させたリーマン幾何学を創設

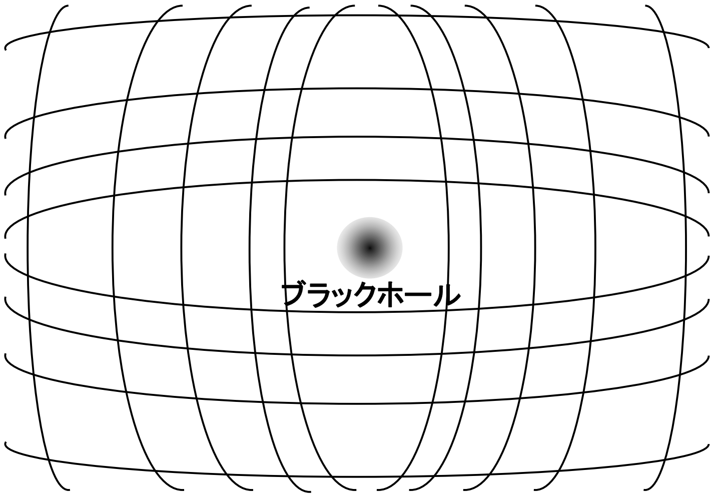
平坦な空間（ユーグリッド空間）



特殊相対性理論による一方向が一様に伸縮した空間



重力により全体が歪んだ空間



上図右のような歪んだ座標で表される空間があるとき、空間の各点で計量（微小な距離）dsが、

$$ds^2 = \mathbf{g}11\cdot dx\cdot dx + \mathbf{g}12\cdot dx\cdot dy + \mathbf{g}13\cdot dx\cdot dz + \mathbf{g}21 dy\cdot dx + \mathbf{g}22\cdot dy\cdot dy + \mathbf{g}23\cdot dy\cdot dz + \mathbf{g}31\cdot dz\cdot dx + \mathbf{g}32\cdot dz\cdot dy + \mathbf{g}33\cdot dz\cdot dz$$

$= \sum_{ij} \mathbf{g}ij\cdot dxi\cdot dxj$　と定義された空間を**リーマン空間**という。ここで**g**ij（i＝1,2,3、j＝1,2,3）を計量テンソルという。

なお，x、y、zの微小な変化量dx、dy、dzを上式では、dx1、dx2、dx3と置き換えた。
相対性理論では、時間と空間は対等で、4次元空間の座標として表されることから、上式は、

$= \sum_{ij}^{4} \mathbf{g}ij\cdot dxi\cdot dxj$　・・・②　と表される。（時間tの微小な変化dtをdx4とした）

たとえば、通常の（平坦な）3次元（ユーグリッド）空間の計量dsは、

$$ds^2 = dx1\cdot dx1 + dx2\cdot dx2 + dx3\cdot dx3 = dx\cdot dx + dy\cdot dy + dz\cdot dz$$

$= dx^2 + dy^2 + dz^2$ となる。　つまり**g**ijは、

$$\mathbf{g}ij = \begin{pmatrix} \mathbf{g}11 & \mathbf{g}12 & \mathbf{g}13 & \mathbf{g}14 \\ \mathbf{g}21 & \mathbf{g}22 & \mathbf{g}23 & \mathbf{g}24 \\ \mathbf{g}31 & \mathbf{g}23 & \mathbf{g}33 & \mathbf{g}34 \\ \mathbf{g}41 & \mathbf{g}42 & \mathbf{g}43 & \mathbf{g}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左式②で、$\sum_{ij}$記号を省略して、以下のように書くことができるとする。

$$ds^2 = \sum_{ij}^{n} \mathbf{g}ij\cdot dxi\cdot dxj = \mathbf{g}ij\cdot dxi\cdot dxj$$

※添え字（上記ではij）が（式の中に2つ）あったとき、iとjについてそれぞれ1からnまで全ての組み合わせを足すこと表す。（アインシュタインの記法）

リーマン幾何学

4次元のリーマン空間の各座標にベクトル（1階のテンソル）が定義されたとき、微小な変位（A点とその近くの点Bの成分の差）を、「dx1,dx2,dx3,dx4」とする。座標系の変更にともない変位が、（dx‘1,dx‘2,dx‘3,dx‘4）に変わったとすると、

$dx'^{i} = (\partial x'^{i} / \partial x^{j}) \cdot dx^{j}$ となる。このように任意のベクトルA の成分（a1,a2,a3,a4）が、

$a'^{i} = (\partial a'^{i} / \partial a^{j}) \cdot a^{j}$ ・・・③ となるベクトルを**反変ベクトル**（テンソル）という。（ijなどの添え字を右上に書く。’記号をもった文字数が分子にくるのが特徴） また

$b'_{i} = (\partial b_{i} / \partial b'_{j}) \cdot b_{j}$ ・・・④ となるベクトルを**共変ベクトル**（テンソル）という。（ijなどの添え字を右下に書く。’記号をもった文字数が分母にくるのが特徴）

一般にn個の次元を持つN階のテンソルがあり N個の座標うち、P個について反変（微分記号で分子の方に変換先のペクトルの成分をもつ）、Q個について共変（微分記号で分母の方に変換先のペクトルの成分をもつ）のテンソルT とその座標変換したものT‘ を

$$T'^{\overbrace{abc\cdots}^{P個}}{}_{\underbrace{def\cdots}_{Q個}} = \partial x'^{a}/\partial x^{g} \cdot \partial x'^{b}/\partial x^{h} \cdot \partial x'^{c}/\partial x^{i} \cdots \partial x^{j}/\partial x'^{d} \cdot \partial x^{k}/\partial x'^{e} \cdot \partial x^{l}/\partial x'^{f} \cdots T^{\overbrace{ghi\cdots}^{P個}}{}_{\underbrace{jkl\cdots}_{Q個}} \quad \cdots⑤$$

と表す。 ※P+Q＝N

もしここで、P個の中（右上の添え字）にもaがあり、Q個の中（右下の添え字）にもaがったあった場合、それらは分母分子で相殺されて以下となる。

$$T'^{\overbrace{abc\cdots}^{P個}}{}_{\underbrace{aef\cdots}_{Q個}} = T'^{\overbrace{bc\cdots}^{P-1個}}{}_{\underbrace{ef\cdots}_{Q-1個}} \quad \cdots⑥$$

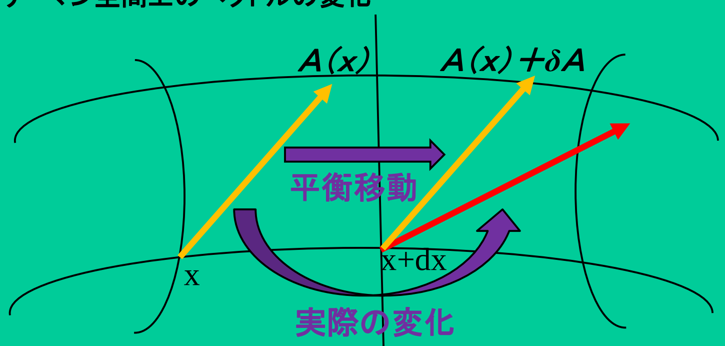
ここでN階のテンソルがN－2階になる。この操作を**テンソルの縮約**という。

ここで、計量 $ds^2 = g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j$ について考える。ds はスカラーであり、$dx^i \cdot dx^j$ は反変テンソルであるから、**g**ijは共変テンソルであり、g_{ij} と書き、その逆行列は反変テンソルであり、g^{ij} と書く。（ $g_{ik} \cdot g^{kj} = \delta^{j}{}_{i}$） ※**δ**はクロネッカーのデルタ記号であり、i=j のとき 1で、i≠j のときは0である。

さらに計量テンソル**g**ijを用いることにより、以下の変換が可能となる。

$g_{kj} \cdot T^{k}{}_{i} = T_{ij}$ $g^{kj} \cdot T_{ik} = T^{j}{}_{i}$ ・・・⑦ なお、$T_{ij} = T_{ji}$ $T^{ij} = T^{ji}$ である。

リーマン空間上のベクトルの変化



歪んだ空間であるリーマン空間上にあるベクトル$A^{i}(x^{k})$について考える。今$A^{i}(x^{k})$を座標x^k からx^k+dx^k に平行移動した場合の変化を$A^{i}(x^{k})+\delta A^{i}$とする。
実際の変化DA^{i}（左の図で、座標x から伸びている黄色い矢印が、座標x+dx から伸びている赤い矢印に移動）は、

$DA^{i} = A^{i}(x^{k}+dx^{k}) - (A^{i}(x^{k}) + \delta A^{i})$ ・・・⑧

ここで、δA^{i} はdx^k とA^{i} に比例するものとして、係数をΓ とし、$\delta A^{i} = -\Gamma^{i}{}_{jk} \cdot A^{j} dx^{k}$とおくと、$dA^{j} = A^{j}(x^{k}+dx^{k}) + A^{j}(x^{k}) = (\partial A^{j} / \partial x^{k}) \cdot dx^{k}$より、⑧は、

$DA^{i} = ((\partial A^{i} / \partial x^{k}) + \Gamma^{i}{}_{jk} \cdot A^{j}) dx^{k}$ ・・・⑨ となる。

リーマン幾何学

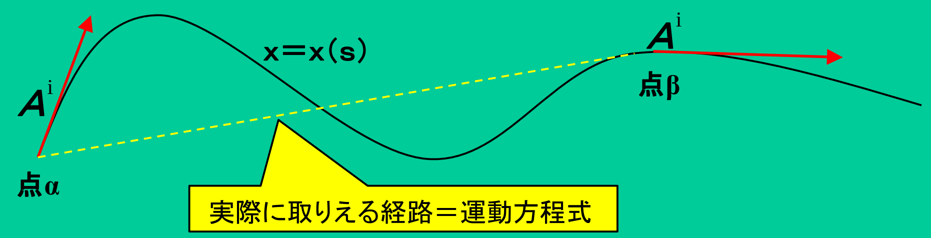
Γ はクリストフェルの記号といい $\Gamma^{i}_{jk} = 1/2 \cdot g^{il} \cdot ((\partial g_{lj}/\partial x^{k}) + (\partial g_{lk}/\partial x^{j}) - (\partial g_{jk}/\partial x^{l}))$ ・・・⑩ である。

また、$\Gamma_{ijk} = 1/2 \cdot ((\partial g_{ij}/\partial x^{k}) + (\partial g_{ik}/\partial x^{j}) - (\partial g_{jk}/\partial x^{i}))$ ・・・⑪ である。

すなわち、$\Gamma^{i}_{jk} = g^{il} \cdot \Gamma_{jkl}$ 、$\Gamma_{ijk} = g_{il} \cdot \Gamma^{l}_{jk}$ ・・・⑫

測地線

曲がらない線、すなわち直線のことを測地線という。リーマン空間の場合そもそも空間自体が曲がっているため、真っ直ぐな線という概念がない。そこで自身に平行な線を測地線と定義する。すると式⑨のDA^{i} は、変化しないことから"0"となる。ここで、線の経路を $x^{i}=x^{i}(s)$と表し、sはパラメータとする。自身に平行ということは、経路の各点での接線ベクトルA^{i}は



$A^{i} = dx^{i}/ds$ とおける。これを⑩に代入すると、

$d^2x^{j}/ds^2 + \Gamma^{j}_{ik} \cdot dx^{i}/ds \cdot dx^{k}/ds = 0$ ・・・⑬ となり、これが測地線の方程式である。

リーマン空間内の測地線を、２点間（AB間）を結ぶ距離が**最小になる線**と言いかえることもできる。それは時間と空間で表される座標空間内で、実際に粒子が辿る線、即ち、粒子の運動方程式とも言える。

リーマン曲率

一般相対性理論では、重力によって空間が歪む。さて、どれくらい歪むか？リーマン空間内でのその歪み具合を表す数値として、**曲率**というものが考えれる。

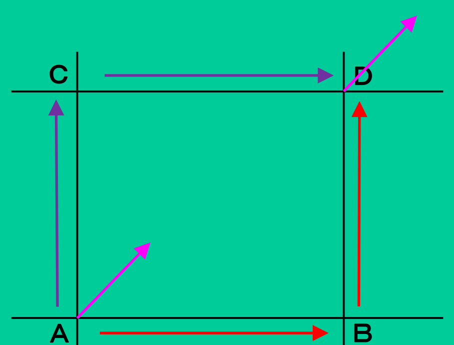


図１

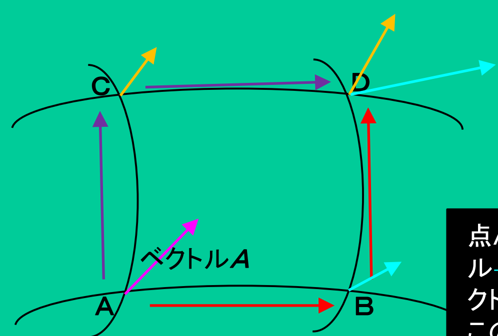


図２

まったく歪んでいないごく普通の平面（ユーグリット空間）では、図１のように点Aにあるベクトルが、AからBを経てDに至る経路を移動したときの変化とAからCを経てDに至る経路を移動したときの変化は同じである。しかし図２のような歪んだ空間では、一般的に一致しない。曲率とは、A→B→Dと、A→C→Dの経路を経た結果ベクトルの変化の差がどれだけあるかによって決まる。と考える。

点Aにあるベクトル→ がA→B→Dを経て、ベクトル→ になった。同じように、A→C→Dの経て、ベクトル→ になった。
このベクトル→ とベクトル→ との差を曲率という
。

二つのベクトルの差が大きければ大きいほど、**空間が歪んでいる。**ということ。

図２で、A、B、C、Dの座標を、(y, z)、(y＋dy, z)、(y, z＋dz)、(y＋dy, z+dz)として、ベクトルA がAからBに移動してA'になったとすると、

$A'_{i} = A_{i} + \Gamma^{j}_{ki} \cdot A_{j} \cdot (\partial x^{k}/\partial y) \cdot dy$ さらに、BからDに移動してA''になったとすると、

リーマン幾何学

$A_i'' = A_i' + \Gamma'^{j}{}_{ki} \cdot A'_j \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dz = A_i + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial y) \cdot dy + (\Gamma^{j}{}_{ki} + (\partial \Gamma^{j}{}_{ki} / \partial x^l) \cdot (\partial x^l / \partial y) \cdot dy)$

$\cdot (A_j + \Gamma^{m}{}_{nj} \cdot A_m \cdot (\partial x^n / \partial y) \cdot dy) \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dz = A_i + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial y) \cdot dy + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dz$

$+ ((\partial \Gamma^{j}{}_{ki} / \partial x^l) + \Gamma^{m}{}_{ki} \cdot \Gamma^{j}{}_{lm}) \cdot A_j \cdot (\partial x^l / \partial y) \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dy \cdot dz$

$\Gamma'^{j}{}_{ki}$ は1次まで求めて $\Gamma'^{j}{}_{ki} = \Gamma^{j}{}_{ki} + (\partial \Gamma^{j}{}_{ki} / \partial x^l) \cdot dx^l$

なお、3次以上の微小量dy·dy·dzは、dy·dy·dz＝0とした。

同様に、ベクトルA がAからCに移動してA'''になったとすると、

$A_i''' = A_i + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dz$ さらに、CからDに移動してA''''になったとすると、

$A_i'''' = A_i + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dz + \Gamma^{j}{}_{ki} \cdot A_j \cdot (\partial x^k / \partial y) \cdot dy + ((\partial \Gamma^{j}{}_{ki} / \partial x^l) + \Gamma^{m}{}_{ki} \cdot \Gamma^{j}{}_{lm}) \cdot A_j \cdot (\partial x^l / \partial z) \cdot (\partial x^k / \partial y) \cdot dz \cdot dy$

A_i''とA_i''''の差δA_i は、

$\delta A_i = R^{j}{}_{ilk} \cdot A_j \cdot (\partial x^l / \partial y) \cdot (\partial x^k / \partial z) \cdot dy \cdot dz$ となる。$R^{j}{}_{ilk}$ は曲率テンソルといい、

$R^{j}{}_{ilk} = (\partial \Gamma^{j}{}_{ik} / \partial x^l) - (\partial \Gamma^{j}{}_{il} / \partial x^k) + \Gamma^{m}{}_{ik} \cdot \Gamma^{j}{}_{lm} - \Gamma^{m}{}_{il} \cdot \Gamma^{j}{}_{km}$ ···⑭

曲率テンソル$R^{j}{}_{kli}$ を縮約したものを、**リッチテンソル** $R^{j}{}_{ijk} = R_{ik}$ さらに リッチテンソルR_{ik} を縮約したものを、**スカラー曲率** $R^{i}{}_{i} = R$ という。

また曲率テンソルは、以下の**ビアンキの恒等式**を満たす。

$\partial R^{j}{}_{ilk} / \partial x^m + \partial R^{j}{}_{ikm} / \partial x^l + \partial R^{j}{}_{iml} / \partial x^k = 0$ ···⑮

ミンコウスキー空間

通常の3次元空間（x, y, z空間）に時間tを加えた4次元空間を「ミンコウスキー空間」という。ミンコウスキー空間は一般的なリーマン空間のように歪んでいないものとする。また空間は時間により変化しないもの（静的）とする。すなわちミンコウスキー空間はリーマン空間の特殊なパターンといえる。ミンコウスキー空間で成り立つことは、リーマン空間でも成り立たなければならない。

ミンコウスキー空間を計量テンソルg_{ij}で表す。ミンコウスキー空間では、$x^1 = x$、$x^2 = y$、$x^3 = z$、$x^4 = tc$である。（cは光速） g_{ij}は以下のとおり。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ※共変テンソル

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ※反変テンソル となり、$g_{ij} = g^{ij}$

さらに、⑫より、$\Gamma^{i}{}_{jk} = \Gamma_{ijk}$ 　時間（$x^4 = tc$）にのみ着目する。⑪にて、時間微分（$\partial / \partial x^4$）は0になることから、

$\Gamma_{i44} = -(\partial g_{44} / \partial x^i) / 2$ ···⑯

重力方程式

これを質点の運動方程式⑬に代入する。$dx^4/ds = c$より、

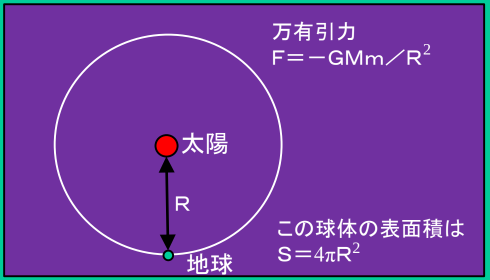
$d^2X^i/ds^2 - c^2/2 \cdot (\partial \mathbf{g}_{44}/\partial x^i) = 0$ ･･･⑰ さらに重力ポテンシャルΦを、$d^2X^i/ds^2 + \partial\Phi/\partial x^i = 0$ ･･･⑱ として定義すると、

$\partial(c^2/2 \cdot \mathbf{g}_{44} + \Phi)/\partial x^i = 0$ より、$\mathbf{g}_{44} = C - 2/c^2 \cdot \Phi$ ･･･⑲ （Cは積分定数）

1

アインシュタインの重力方程式

例えば、太陽と地球の間の引力を考える。万有引力の式より、 力Fは、$F = -G\cdot M\cdot m/R^2$（Mは太陽の質慮、mは地球の質量、Rは太陽と地球の距離、Gは万有引力定数）となる。ここで重力ポテンシャルΦを使って表すと、



$\int \nabla^2\Phi\ dV = \int \nabla\Phi\ dS = \int \nabla E/m\ dS = \int -F/m\ dS = \int G\cdot M/R^2 dS$

$= G\cdot M\cdot(4\pi R^2)/R^2 = 4\pi G\cdot\int\rho\ dV$ よって $\nabla^2\Phi = 4\pi G\cdot\rho$ ･･･⑳ ※Eはエネルギー、ρは太陽の質量密度

ここに、⑲を代入すると、$-\nabla^2 \mathbf{g}_{44} = 2/c^2 \cdot \nabla^2\Phi = 8\pi G/c^2 \cdot \rho$ ･･･❶

エネルギーテンソルT ^{ij}を $E = \int T^{ij}\ dV$ と定義する。$E = mc^2$より、$T_{44} = \rho\cdot c^2$ ･･･❷ これを⑳に代入すると、

$-\nabla^2 \mathbf{g}_{44} = 8\pi G/c^4 \cdot T_{44}$ これを拡張して、

$-\nabla_k^2 \mathbf{g}_{ij} = 8\pi G/c^4 \cdot T_{ij}$ ･･･❸ （k=1,2,3,4）

さらに、T_{ij} は、ある領域内でエネルギー保存の法則が成り立つことから、

$\partial T_{ij}/\partial x^j = 0$ ･･･❹ となる。

❹の証明 ※ある空間の領域（体積V、表面積S）を考える

$\alpha = 1,2,3$
$x^1 = x \quad x^2 = y$
$x^3 = z \quad x^4 = -c\cdot t$

$\nabla_k E = \int \nabla_k T_{ij}\, dV = \int (\partial T_{i4}/\partial x^4 + \partial T_{i\alpha}/\partial x^\alpha)dV$

$= -1/c\cdot\partial\int T_{i4}dV/\partial t + \int T_{i\alpha}dS$ エネルギー保存則より、

$= 0$ ※$\nabla_k = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t$ （k=1,2,3,4）

ここで、重力の方程式 ❸が導かれた。即ち、歪んだ空間であるリーマン空間の性質を表す$\mathbf{g}_{ij}$とその基となる物質のエネルギーとの関係を表す。
さらに❸を座標変換に対して扱いやす形に書き換える。❸の左辺、つまり空間の歪み具合を、曲率または、それを縮約したリッチテンソルやスカラー曲率で表せないかと考えてみる。

ビアンキの恒等式⑮において、j = k として縮約する。

$\partial R^j{}_{ilj}/\partial x^m + \partial R^j{}_{ijm}/\partial x^l + \partial R^j{}_{iml}/\partial x^j = \partial R_{il}/\partial x^m - \partial R_{im}/\partial x^l + \partial R^j{}_{iml}/\partial x^j = 0$

左から $\mathbf{g}^{il}$ をかけると、

$\partial R/\partial x^m - \partial R^l{}_m/\partial x^l - \partial R^j{}_m/\partial x^j = 0$

重力方程式

さらに、j=l とする。

$\partial R/\partial x^m - \partial R^j{}_m/\partial x^j - \partial R^j{}_m/\partial x^j = \partial R/\partial x^m - 2\partial R^j{}_m/\partial x^j$　移項して、$\partial R^j{}_m/\partial x^j - 1/2 \cdot \partial R/\partial x^m = 0$

さらに、左から $\mathbf{g}_{ij}$ をかける。

$\partial R_{im}/\partial x^j - 1/2 \cdot \mathbf{g}_{ij}\,\partial R/\partial x^m = 0$

最後に、j=mとすると、

$\partial R_{ij}/\partial x^j - 1/2 \cdot \mathbf{g}_{ij}\,\partial R/\partial x^j = 0$　ここで、$G_{ij} = R_{ij} - 1/2 \cdot \mathbf{g}_{ij} \cdot R$ とおく。(G をアインシュタインテンソルという)

$\partial G_{ij}/\partial x^j = 0$ ･･･❺　となる。これを❹と比較すると、G_{ij} とT_{ij} の類似性から、 $G_{ij} = k \cdot T_{ij}$ となる。(kは比例定数。❸により、$k = 8\pi G/c^4$ とする) 従って

$R_{ij} - 1/2 \cdot \mathbf{g}_{ij} \cdot R = 8\pi G/c^4\ T_{ij}$ ･･･❻ となる。これを**アインシュタインの重力方程式**と呼ぶ。
※R_{ij} はリッチテンソル、R はスカラー曲率、T_{ij} はエネルギーテンソル

アインシュタインの重力方程式　$R_{ij} - 1/2 \cdot \mathbf{g}_{ij} \cdot R = 8\pi G/c^4 \cdot T_{ij}$

これが重力場を記述する方程式であり、これにより、ブラックホールや宇宙膨張の謎を解き明かすことができる。

重力方程式の性質

(1) この方程式は、計量テンソル$\mathbf{g}_{ij}$ を導くためのもので、$\mathbf{g}_{ij}$ は空間の性質(歪み具合)を示し、$\mathbf{g}_{ij}$ が求まれば、②より、計量dsが得られる。

(2) 重力方程式は、⑭および⑩より、$\mathbf{g}_{ij}$についての2階微分までを含んでいる。

(3) $\mathbf{g}_{ij}$ のijは、通常の3次元空間(x,y,z)に時間(t)を合わせた4つの成分を持つ。即ち方程式としては、ijで4×4=16通りの式が導き出される。
ただし、$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_{ji}$より6成分は重複していることにより、最終的な元の数は、16−6=10通りの式になる。

$$\mathbf{g}^{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

このニつはダブリ

従って重力方程式は、“10元連立2階偏微分方程式”ということになる。

参考図書:「相対論」平川浩正著(1971 共立出版)

重力方程式

重力方程式から導き出せること

このアインシュタインの重力方程式を解くことは非常に難しく、現在まで僅かの解しか見つかっていない。ここではその主なものを紹介し、その解からこの宇宙について言えることを解説する。

シュバルツシルド解

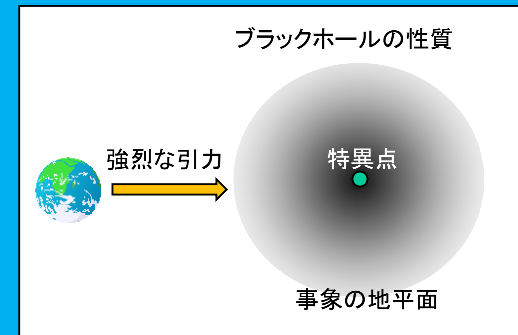
空間にエネルギー(質量)を持った物体があるとき(静止しているとき)、その周囲の時空が歪む。
その歪み方を計量dsで表す。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{(1-2m/r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

・・・シュバルトシルド(注)解

※空間座標x、y、zを極座標　r、θ、φ　で表している。mは物体の質量。rは中心からの距離。

この式から有名なブラックホールの存在を予言。ブラックホールの性質(事象の地平面や特異点)を表す。
(注)1873～1916　ドイツの物理学者



フリードマン方程式

重力方程式を宇宙空間に当てはめてみる。
半径aの球を考える。球内部の密度をρ、現時点での半径をa0、密度をρ0とすると、aの時間変化　da／dtは、

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho 0}{3}\left(\frac{a0}{a}\right)^3 = -kc^2$$

・・・フリードマン(注)方程式

Gは万有引力定数、cは光速、kは比例定数
この式から宇宙膨張説が理論的に導かれる。
(注)1888～1925　ロシアの気象学者

フリードマン方程式より、未来の宇宙の姿を予測できる。シナリオは主に二つ。
一つは、宇宙はこのまま永遠に膨張を続ける。
二つ目は、重力によって将来膨張が止まり収縮に転じる。そして宇宙は一点に向かって消滅する。これを**ビッグクランチ**という。