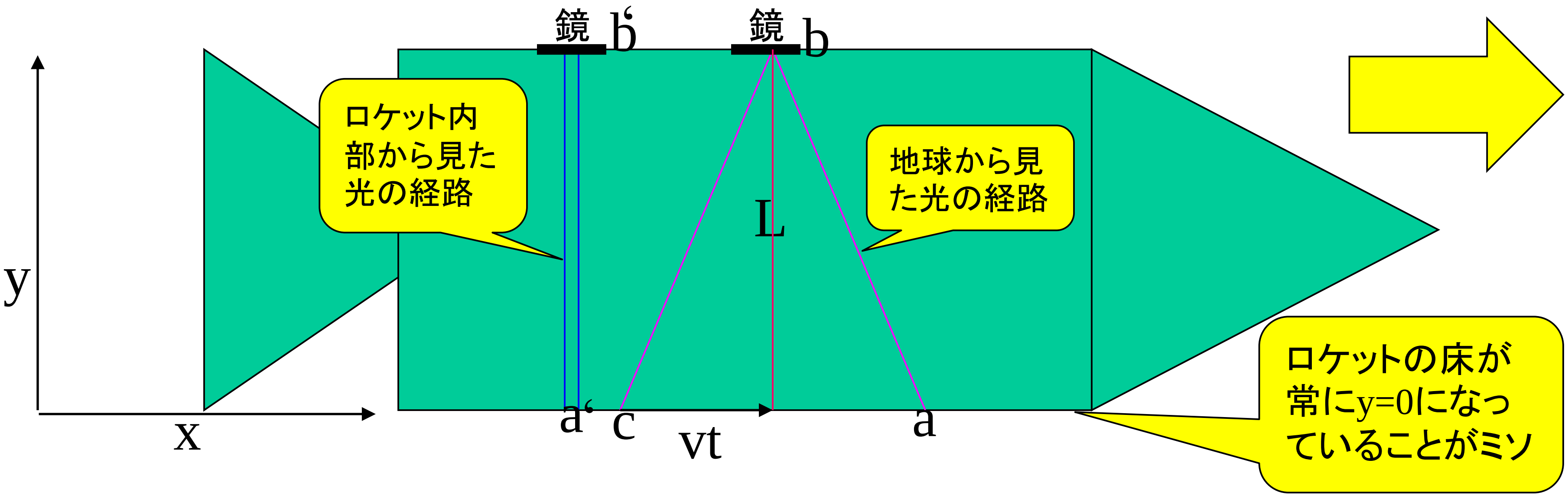
相対性理論の時間の遅れ

地球から見て、一定の速度Vで一定の方向に(xy座標のx軸に沿って)飛行しているロケット



時間の縮み具合

★ ロケット内部のt'とL' の関係は･･･ $t' = L'/c$

★ $L' = L$ より･･･ $t' = L/c$

★ 地球上でのt とL の関係は、(ピタゴラスの定理を使うと)

･･･ $t = \sqrt{v^2 \cdot t^2 + L^2} / c$

★ 従って、t とt の関係は、(Lについてとくと) ･･･

$$t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot t$$

★ 上の式は、VがCに近づくほど、時間の差が大きくなる

L'＝Lの証明

★ LとL'の比a は、Vの関数となるはず

$$L = a(v) \cdot L'$$

$$L' = a(v) \cdot L$$

$$a(v)^2 = 1$$

$$a(v) = \pm 1$$

$$L' = L$$

ポイント

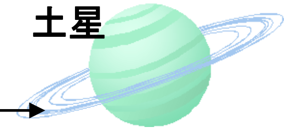
上記図形が、直角三角形になる理由は･･･

地球にいる観測者とロケットの搭乗者にとって、VとCの値は同じであること。

左記のとおり、L' =L であるとこ。(ロケットの床部分が常にy=0で変化しないため)

相対性理論から言えること(その1)

1．距離が縮む

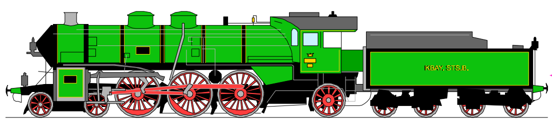


光に近い速度で飛んでいる宇宙船内では時間がゆっくり進む。ということは、宇宙船から見れば距離が縮まったように見える。

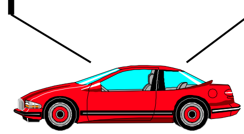
速度Vで移動している宇宙船内の時間は、地球での時間よりも、$t = t' \sqrt{1-V^2/C^2}$ [t'は地球から見た土星までの移動時間]

縮むことから、宇宙船から見た距離(空間)の縮み方は $L = L' \sqrt{1-V^2/C^2}$ [L' は地球から見た土星までの距離、Cは光速]
となる。
つまり光の速度で飛べば、どんなに離れた場所でも距離はゼロ。（ということは、そこまでの所要時間もゼロ。即ち瞬間移動が可能）

2．相対速度

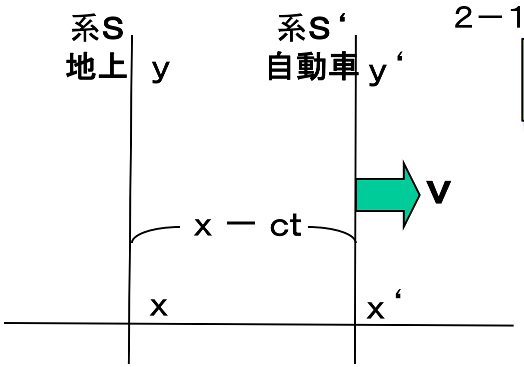


走っている自動車から見れば地上の踏み切り間の距離は縮まって見えるはず
Xメートル
時速120キロ



時速40キロ

時速120キロで走っている機関車と時速40キロで走っている自動車。自動車から見た機関車の速度は、単純に120－40＝80キロでいいのか？



2－1．異なる座標系から見た位置と時間

左図のように、基準となる場所(例えば地上)として座標系Sを定める。次にその基準に対して速度v で動いている別の座標系S'(例えば自動車)を設ける。その際、Sから見たS'の位置と時間がどう変化するかを考える。

相対性理論によれば、高速で動く物体内では時間がゆっくり進む。ということはそこでは時間が伸びる。別の言い方では、高速の乗り物内にいる人間は寿命が伸びる。(自動車なら僅かに)
その伸び率は、$T' = T/\sqrt{1-v^2/c^2}$ となる。VがCに近づけば、乗り物内にいる人間はいつまでも生き続ける。
(ただし、あくまで地上から見たら)
左の図で座標系SとS'の位置の関係は単純に、$x' = x - v \cdot t$ではない。時間が伸びるということは空間も伸びる。
つまり、$x' = (x - v \cdot t)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ・・・①
S'から見たSの関係式も同じ形にならないといけないことから、$x = (x' + v \cdot t')/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ・・・②
(vは反対向きになるから"－"をつける)
①と②から、$t' = (t - v \cdot x/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ・・・③となる。

この式①と③をローレンツ変換という。ここで移動物体の速度が光に比べて非常に遅い時、c／v=0とおけることから、①、③は、$x' = x - v \cdot t$ および $t' = t$ となる。これをガリレオ変換という。むろん日常では、ガリレオ変換さえ知って入れは十分。ガリレオは、中世イタリアの科学者である。科学が宗教に弾圧されたという象徴的な事件で有名。

相対性理論から言えること（その2）

2－2. 相対速度の式

前の図で、地上から見た機関車の速度をv1、自動車の速度をv2とした場合、自動車から見た機関車の速度vを求める

速度vは距離を時間で微分したもの。すなわち、$v = dx／dt$ ・・・④
地上から見た機関車の位置と時間を、x1、t1、自動車の位置と時間を、x2、t2とすると、

$$dx = (dx1 - v2 \cdot dt1)／\sqrt{1-v^2／c^2}$$
$$dt = (dt1 - v2 \cdot xt1／c)／\sqrt{1-v^2／c^2}$$

これを④に代入して、

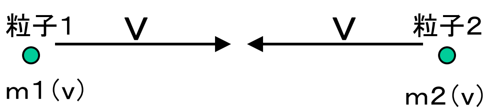
$$dx = v \cdot dt = (dx1 - v2 \cdot dt1)／\sqrt{1-v^2／c^2} = v \cdot (dt1 - v2 \cdot xt1／c^2)／\sqrt{1-v^2／c^2}$$

この両辺に $\sqrt{1-v^2／c^2}$ をかけて、dt1で割ると、 $v1 - v2 = v \cdot (1 - v1 \cdot v2／c^2)$
すなわち、 $v = (v1 - v2)／(1 - v1 \cdot v2／c^2)$ ・・・⑤
となる。これをv1について解くと、
$v1 = (v + v2)／(1 + v \cdot v2／c^2)$ となる。

これは、地上から見て自動車が光に近いスピード（v2）で動いている。かつ自動車から見て機関車が光に近いスピード（v）で走っている場合、普通考えられる地上から見た機関車のスピード（v1）は、光の2倍のスピード。即ち光の速さを超えていることになるのに対して、2倍になった光の速さは2で割られるため、実際のスピードは光の速さを超えることはない。

3. 運動すると質量が増す

（運動すればダイエットできるわけではない？）



左の図のように、同じ重さの粒子1と粒子2が、同じ速度で正面衝突して静止したと考える。その時でも、「運動量」は保存されなければならない。運動量保存の法則は普遍であるから。その場合質量はどう変化するのか？
普通物体が運動しても、質量は変わらない。重さは増えたり減ったりしないものと思われるが、相対性理論に基づき質量を速度vの関数として表し、m（v）とする。よって運動量Pは、$P = v \cdot m(v)$ となる。

衝突の前後で運動量は保存されることから、
$v \cdot m1(v) + v \cdot m2(v) = 0$
次に、この系Sに対し速度v'で動く、別の系S'から見た衝突を考える。相対性原理から、いかなる系から見ても「運動量保存の法則」は成り立たなければならない。従って
$m1(v1) \cdot v1 + m2(v2) \cdot v2 = (m1 + m2)(-v')$ ・・・⑥
⑤から、v1 → v、v2 → v'とおいて、さらに粒子1、粒子2の速度をv1、v2すると、
$v1 = (v - v')／(1 - v \cdot v'／c^2)$　　$v2 = (-v - v')／(1 + v \cdot v'／c^2)$ ・・・⑦
となる。
これをvについて解くと、
$v = (v1 + v')／(1 + v1 \cdot v'／c^2) = (-v2 - v')／(1 + v2 \cdot v'／c^2)$ ・・・⑧
式を簡単にするため、系S'から見た際たまたま $v2 = 0$ となったとすると、⑥、⑧は、
$m1(v1) \cdot v1 = (m1(v1) + m2(0))(-v')$ ・・・⑨
$(v1 + v')／(1 + v1 \cdot v'／c^2) = -v'$ ・・・⑩
⑨で求めたv'を⑩に代入すると、
$(m1(v1)／m2(0)) = 1／\alpha = 1／\sqrt{1-v^2／c^2}$ ・・・⑪ （右枠参照）

左の式⑩で v' → u、v1 → v と置き換えて整理すると、
$(v／c^2) \cdot u + 2u + v = 0$
これをuの二次方程式として、解の公式に当てはめる。
※解の公式、$ax^2 + bx + c = 0$ なら、$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})／2a$
$u = (-1 \pm \sqrt{1-v^2／c^2})／(v／c^2)$
ここに、⑨を代入する。（ v' → u と置き換える）
$(m1／m2) \cdot (v^2／c^2) - 1 \pm \sqrt{1-v^2／c^2} = 1 \mp \sqrt{1-v^2／c^2}$
$\alpha \to \sqrt{1-v^2／c^2}$ と置き換えると、
$(m1／m2) = (1 \mp \alpha)／(-\alpha^2 \pm \alpha)$
右辺の分母分子を $1-\alpha$ で約分すると、

$(m1(v)／m2(0)) = 1／\alpha = 1／\sqrt{1-v^2／c^2}$

相対性理論から言えること（その3）

となる。
ここでm2は、粒子2の静止しているときの質量。粒子1、粒子2は同じ質量のため、粒子1の静止しているときの質量とも言える。それを粒子1の静止質量として、m0と記す。ある系から観測された粒子1の速度をv　、その時質量vの関数としてm（v）とすると、⑪より

$$m(v) = m0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad \cdots ⑫$$

となる。これは、高速で運動すると、質量が増す。光の速度で動けば、
質量が無限大に。（質量は静止しているときが一番小さい）
即ち光の速度で移動することは不可能。
まして、光の速度を超えることはできない。

4. エネルギー＝質量

移動しているものは質量が増す。速度vが増せば、運動量P（v）も加速的に増える。

$$P(v) = m(v) \cdot v = (v \cdot m0) / \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad \cdots ⑬$$

左の図のように、走っている自動車は運動エネルギーを持っている。そのエネルギー量は、速度vの物体が停止するまでにどれだけの**仕事**をするかによって求められる。

仕事量E（エネルギー）は、力Fが働いてどれだけの距離を移動したかにより決められる。即ちエネルギーの微小な変化dEは、
$dE = F \cdot dx$ ・・・⑭ （dは微分記号、移動距離をxとする）
運動量の変化は力積（力とその力が働いた時間の積）に等しいことから、
$dE = F \cdot dx = dP \cdot (dx / dt) = v \cdot dP$ ・・・⑮ （時間をtとする）
⑬より、vをPで解いて（$v = P \cdot c / \sqrt{m0^2 \cdot c^2 + P^2}$）、それを⑮に代入すると、
$dE = (P \cdot c / \sqrt{m0^2 \cdot c^2 + P^2}) \cdot dP$ ・・・⑯ （m0は物体が静止しているときの質量）
この両辺を物体の速度v1から0までの間で積分すると、

$$\Delta E = \int_0^{v1} (P \cdot c / \sqrt{m0^2 \cdot c^2 + P^2}) \cdot dP = \left[c \cdot \sqrt{m0^2 \cdot c^2 + P^2} \right]_0^{v1}$$

（ΔEは速度vで運動していた物体が、静止するまでに行った仕事量）

運動量Pに⑬を代入して、

$$\Delta E = \left[c \cdot \sqrt{m0^2 \cdot c^2 + m0^2 \cdot v^2 / (1 - v^2 / c^2)} \right]_0^{v1} = \left[m0 \cdot c^2 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} \right]_0^{v1}$$

従って

$$\Delta E = (m0 \cdot c^2 / \sqrt{1 - v1^2 / c^2}) - m0 \cdot c^2 \quad \cdots ⑰$$

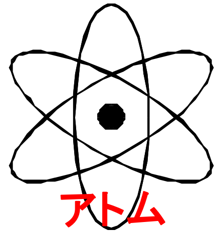
この式⑰は何を意味しているのだろうか？ここで第1項の　$m0 / \sqrt{1 - v1^2 / c^2}$　は物体が速度v1で運動していたときの質量である。第2項の　m0　はもちろん物体が静止したときの質量である。即ち質量が減った分、それに相当するエネルギーを失ったことになる。

相対性理論から言えること(その4)

このことから言えること、エネルギーは質量に比例する。否、エネルギーは質量そのもの。
ここからあの有名な式、

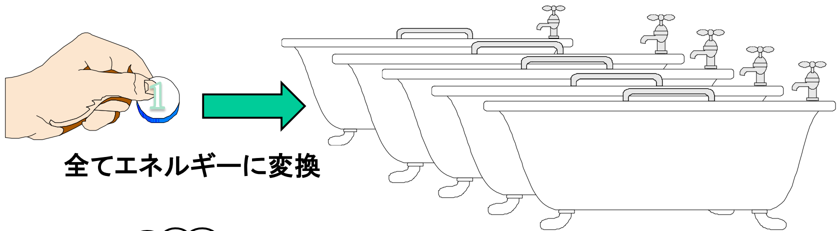
$$E = mc^2$$

が現れる。これが20世紀の核エネルギーの利用(原子力・原爆)を告げるものになった。



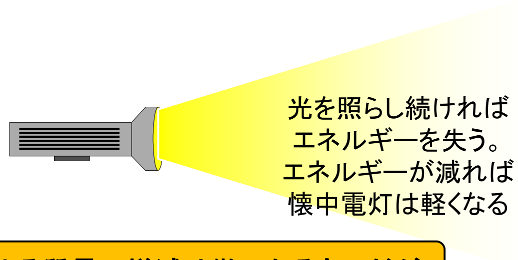
■質量をエネルギーに変換したら

1グラムの物体(1円玉)をすべてエネルギーに変えたとしたら、20兆カロリーもの熱が得られる。お風呂(横2メートル×幅1メートル×深さ50センチ)を沸かす(水温20度から40度に熱する)としたら、約200万個のお風呂が沸かせる。
とてつもないエネルギーが得られる!



■質量とエネルギーの変換は原子力、核エネルキーの話だけではない

速く走れば
運動エネルギーが増す
エネルギーが増せば
体重も増える



光を照らし続ければ
エネルギーを失う。
エネルギーが減れば
懐中電灯は軽くなる

これらによる質量の増減は微々たるものだが

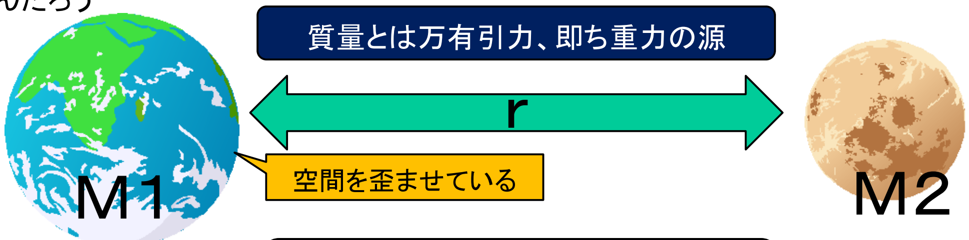
物質A、aグラムに物質B、bグラムを加えて
化学反応が起こし、結果、物質C、cグラムができ、
その際、熱Ecalが発生する。これを化学式で書くと、

$$A + B \rightarrow C + Ecal$$

発生した熱エネルギーEは、
(Aの質量 + Bの質量 − Cの質量)×(光の速度)^2
に等しい

■果たして**質量**とはなんだろう

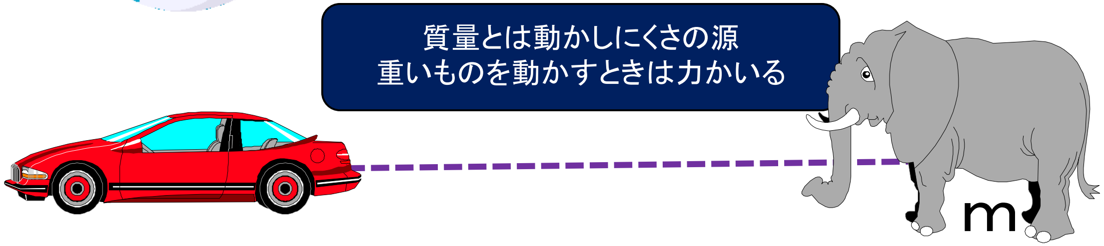
質量とは万有引力、即ち重力の源



空間を歪ませている

$$F = -G\frac{M1 \cdot M2}{r^2}$$

質量とは動かしにくさの源
重いものを動かすときは力かいる



$$F = ma$$